

例 29 p34

$$(1) 2a + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{6}$$

[証明]

$2a > 0, \frac{3}{a} > 0$ より 相加平均と相乗平均により

$$2a + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{3}{a}}$$

$$\geq 2\sqrt{6}$$

よって $2a + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{6}$

等号成立の

$$2a = \frac{3}{a} \quad a > 0$$

$$2a^2 = 3$$

$$a^2 = \frac{3}{2}$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$a > 0$ より

$a = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad a > 0$

中村学習塾

中村学習塾

中村学習塾

中村学習塾

中村学習塾

中村学習塾

中村学習塾

$$(2) \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \geq 4$$

[証明]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \\ &= 1 + \frac{bc}{ad} + \frac{ad}{bc} + 1 \\ &= \frac{bc}{ad} + \frac{ad}{bc} + 2 \end{aligned}$$

$\frac{bc}{ad} > 0, \frac{ad}{bc} > 0$ より 相加平均と相乗平均より

$$\frac{bc}{ad} + \frac{ad}{bc} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{ad} \cdot \frac{ad}{bc}}$$

$$\geq 2\sqrt{1}$$

$$\geq 2$$

両辺に 2 を足して

$$\frac{bc}{ad} + \frac{ad}{bc} + 2 \geq 2 + 2$$

$$\frac{bc}{ad} + \frac{ad}{bc} + 2 \geq 4$$

よって

$\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \geq 4$

→ 等号成立の

$$\frac{bc}{ad} = \frac{ad}{bc}$$

両辺に $adbc$ をかけると

$$b^2c^2 = a^2d^2$$

$$bc = \pm ad$$

$bc > 0$ より

$bc = ad \quad a > 0$

