5. P112

$x + x(1-x)^2 + x(1-x)^4 + x(1-x)^6 + \cdots$

初項 x, 公比 $(1-x)^2$ の無限等比級数

収束するとき

$x=0$ または $|(1-x)^2|<1$

$|(1-x)^2|<1$ をとくと

$(1-x)^2<1$

$1-2x+x^2<1$

$x^2-2x<0$

$x(x-2)<0$

$0<x<2$

よって ∴ $0 \leqq x<2$ のとき収束

∴ $x=0$ のとき 和は 0

$0<x<2$ のとき 和は

$$\frac{x}{1-(1-x)^2}$$
$$=\frac{x}{1-(1-2x+x^2)}$$
$$=\frac{x}{-x^2+2x}$$
$$=\frac{x}{x(-x+2)}$$
$$=\frac{1}{-x+2}$$

∴ $0<x<2$ のとき 和は $\dfrac{1}{2-x}$

6. P112

$\triangle AC_1B_1$ と $\triangle A_1B_1C_1$ について

中点連結定理より

$AC_1 = A_1B_1$

$AB_1 = A_1C_1$

共通より

$C_1B_1 = B_1C_1$

よって

$\triangle AC_1B_1 \equiv \triangle A_1B_1C_1$ …①

また中点連結定理より

$\triangle ABC \backsim \triangle AC_1B_1$

相似比は $2:1$

①より

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

相似比は $2:1$

面積比は

$\triangle ABC : \triangle A_1B_1C_1 = 2^2 : 1$
$= 4:1$

同様に

$\triangle A_1B_1C_1 : \triangle A_2B_2C_2 = 4:1$

$\triangle ABC$の面積を a とおくと

$\triangle A_1B_1C_1 = \frac{1}{4}a$

$\triangle A_2B_2C_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}a = \left(\frac{1}{4}\right)^2 a$

$\triangle A_3B_3C_3 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 a = \left(\frac{1}{4}\right)^3 a$

⋮

$S = \triangle A_1B_1C_1 + \triangle A_2B_2C_2 + \triangle A_3B_3C_3 + \cdots$
$= \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \left(\frac{1}{4}\right)^3 a + \cdots$

初項 $\frac{1}{4}a$, 公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数

$$S = \frac{\frac{1}{4}a}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{a}{4-1}$$
$$= \frac{a}{3}$$

∴ $S = \frac{1}{3}a$