13 P34

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 2$ より

$\frac{x}{a} = 2$, $\frac{y}{b} = 2$, $\frac{z}{c} = 2$

$x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$

(1) $\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{2a+2b+2c}{a+b+c}$

$= \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$

$= 2$

(2) $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2}{a^2+b^2+c^2}$

$= \frac{4a^2+4b^2+4c^2}{a^2+b^2+c^2}$

$= \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}$

$= 4$

14 P34

$a>b>0$, $a+b=1$ より

例えば $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ とおいてみる

$2ab = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$a^2+b^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

よって.

$\frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{5}{8}$

よって

$2ab < \frac{1}{2} < a^2+b^2$

こうなることが予測される.

差をとって証明する

$a^2+b^2-\frac{1}{2}$

ここで $a+b=1$ より, $a=1-b$ を代入

$a^2+b^2-\frac{1}{2}$

$= (1-b)^2+b^2-\frac{1}{2}$

$= 1-2b+b^2+b^2-\frac{1}{2}$

$= 2b^2-2b+\frac{1}{2}$

$= 2(b^2-b)+\frac{1}{2}$

$= 2\left\{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+\frac{1}{2}$

$= 2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$= 2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2$

ここで $a>b>0$ かつ $a+b=1$ より

$b<\frac{1}{2}$ なので

$2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 > 0$

よって

$a^2+b^2-\frac{1}{2} > 0$

よって

$a^2+b^2 > \frac{1}{2}$

次に

$\frac{1}{2} - 2ab$

$a=1-b$ を代入

$\frac{1}{2} - 2ab = \frac{1}{2} - 2(1-b)b$

$= \frac{1}{2} - 2b + 2b^2$

$= 2b^2 - 2b + \frac{1}{2}$

$= 2b^2-2b+\frac{1}{2}$

$= 2(b^2-b)+\frac{1}{2}$

$= 2\left\{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+\frac{1}{2}$

$= 2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$= 2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2$

同様に

$2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 > 0$

よって

$\frac{1}{2} - 2ab > 0$

$\frac{1}{2} > 2ab$

$\therefore\ a^2+b^2 > \frac{1}{2} > 2ab$