[11] P118

P_{n+1} を求めると

(i) n 回目までに、3の倍数の目が奇数回出ていて、
$n+1$ 回目に 3の倍数以外の目が出る

(ii) n 回目までに、3の倍数の目が偶数回出ていて
$n+1$ 回目に 3の倍数の目が出る

(i)(ii) の和事象であるので

$$P_{n+1} = P_n \cdot \frac{4}{6} + (1 - P_n) \cdot \frac{2}{6}$$

$$P_{n+1} = \frac{2}{3} P_n - \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{3}$$

$$P_{n+1} = \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

c を実数として

$$c = \frac{1}{3} c + \frac{1}{3} \quad \cdots ② \text{ とおく}$$

①−② より

$$P_{n+1} - c = \frac{1}{3} (P_n - c) \quad \cdots ③$$

② を解いて

$$c = \frac{1}{3} c + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} c = \frac{1}{3}$$

$$c = \frac{1}{2}$$

③ は

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(P_n - \frac{1}{2} \right) \quad \cdots ④$$

数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = P_n - \frac{1}{2} \quad \cdots ⑤$$

とおいて ④ は

$$b_{n+1} = \frac{1}{3} b_n$$

数列 $\{b_n\}$ は、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列。

初項 b_1 は ⑤ より

$$b_n = P_n - \frac{1}{2}$$

$$b_1 = P_1 - \frac{1}{2}$$

ここで P_1 を求めると

1回投げて 3の倍数が 1回でる確率

$$P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

よって

$$b_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}$$

よって 数列 $\{b_n\}$ の 一般項は

$$b_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

⑤ より

$$b_n = P_n - \frac{1}{2}$$

$$P_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\therefore P_n = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$