

⑩ P104

$$(1) a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

$$n=1 \text{ のとき } a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n=2 \text{ のとき } a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$n=3 \text{ のとき } a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}$$

$$(2) a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}$$

$$a_1 = \frac{2}{1}, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}$$

よって

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

と推測された。

$$n \geq 1 \text{ のとき } a_n = \frac{n+1}{n} \quad \dots \textcircled{A}$$

[証明]

(1) $n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

よって $n=1$ のとき \textcircled{A} は成り立つ(2) $n=k$ のとき \textcircled{A} は成り立つと仮定すると

$$a_k = \frac{k+1}{k} \quad \dots \textcircled{1}$$

 $n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k}$$

①より

$$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{\frac{k+1}{k}}$$

$$= 2 - \frac{k}{k+1}$$

$$= \frac{2(k+1)}{k+1} - \frac{k}{k+1}$$

$$= \frac{2(k+1) - k}{k+1}$$

$$= \frac{k+2}{k+1}$$

$$= \frac{(k+1)+1}{k+1}$$

よって $n=k+1$ のとき \textcircled{A} は成り立つ

(1)(2)より

$$n \geq 1 \text{ のとき } a_n = \frac{n+1}{n} \text{ は成り立つ}$$