

例 44 T 103

$$n \geq 3 \quad 2^n > 2n+1 \quad \dots \textcircled{A}$$

[証明]

(1) $n=3$ のとき

$$(\text{左辺}) = 2^3 = 8$$

$$(\text{右辺}) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

よって $n=3$ のとき \textcircled{A} は成り立つ(2) $k \geq 3$ とし、 $n=k$ のとき \textcircled{A} は成り立つと仮定すると

$$2^k > 2k+1 \quad \dots \textcircled{1}$$

 $n=k+1$ のとき \textcircled{A} の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 2^{k+1} - \{2(k+1)+1\} \\ &= 2 \cdot 2^k - \{2(k+1)+1\} \end{aligned}$$

①より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 2 \cdot 2^k - \{2(k+1)+1\} \\ &> 2 \cdot (2k+1) - \{2(k+1)+1\} \\ &= 4k+2 - \{2k+2+1\} \\ &= 4k+2 - 2k - 2 - 1 \\ &= 2k-1 > 0 \end{aligned}$$

← $k \geq 3$ より

$$\text{よって} \quad 2^{k+1} > 2(k+1)+1$$

よって $n=k+1$ のとき \textcircled{A} は成り立つ[1][2]より $n \geq 3$ のすべての自然数 n に対して \textcircled{A} は成り立つ