例1 P100

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$

$a_{n+2} = (3+1)a_{n+1} - 3a_n$

公式より

$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$ …①

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、①は、

$b_{n+1} = 3b_n$

数列$\{b_n\}$は、公比3の等比数列

初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$

数列$\{b_n\}$の一般項は

$b_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ より

$a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

数列$\{a_n\}$の階差数列の一般項は $3 \cdot 3^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 3^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$= 1 + \frac{3 \cdot 3^{n-1} - 3}{2}$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{3^n - 3}{2}$$

$$a_n = \frac{3^n - 1}{2} \quad \cdots ②$$

②について、$n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{3^1 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

よって②は、$n = 1$ でも成り立つ

$$\therefore a_n = \frac{3^n - 1}{2} \quad (n \geqq 1)$$

公式

$a_{n+2} = (p+1)a_{n+1} - pa_n$ の形

$\Downarrow$

$a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n)$

数列$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$のとき

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \cdots ①$$

$n = 1$ のときは、①を $n = 1$ にかてしらべて成り立つかどうか。