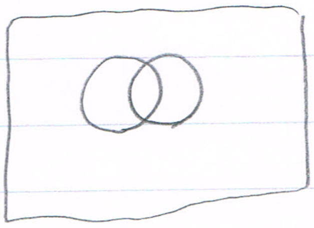
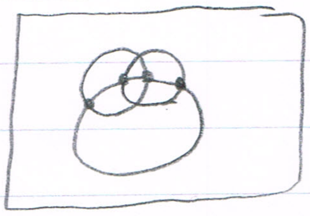
16 P43

円が1つ増えると、その増えた円は交点をいくつもつかを考えると



→



2個の円があったとすると

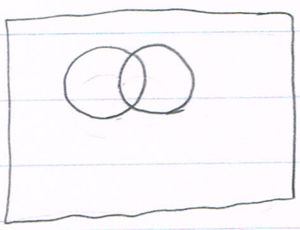
新たに増えた円はもとあった円と、それぞれ2個の交点をもつので、交点は $2\times2=4$ 個もつことになる

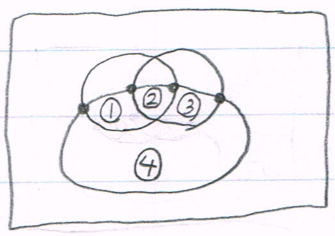
⇩

もとあった円が n 個のとき

新たな円がもつ交点の個数は、$2n$ 個となる

次に円が1つ増えると、その増えた円によって平面はいくつ増えるかを考えると





平面は4個あった

新たに増えた円によって平面は増えて8個になった。4個ふえた。

↓

増えた4個の平面は①,②,③,④である。

↓

①,②,③,④は、新たに増えた円の円周上の交点によって区切られた弧によって、もとあった平面が、2つに割られて増えている。

円周上の交点の数は、交点によって区切られた弧の数と等しいので、新たに増えた円のその円周上の交点の数だけ平面は増える。

↓

円が n 個のとき、平面は a_n 個あるとすると、円が1つ増えて、円が $n+1$ 個になると、その時の平面の個数 a_{n+1} 個は、

$$a_{n+1}=a_n+\underbrace{2n}_{}$$

↓

新たに増えた円の円周上の交点の個数（＝弧の数）

よって円の個数 n 個のとき、平面の数 a_n 個の漸化式は、円の数が2個以上の条件で

$$a_{n+1}=a_n+2n \quad (n\geqq2)$$

円が2個以上ないと、交点もないから

これをといて、

$$a_{n+1}-a_n=2n \quad (n\geqq2)$$

$\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $2n$ であるから、

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k \quad (n\geqq2)$$

円が1個のとき、平面は2個なので

$$a_1=2$$

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}2k \quad (n\geqq2)$$

$$=2+2\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n$$

$$=2+n^2-n$$

$$a_n=n^2-n+2 \quad (n\geqq2)$$

$n=1$ のとき、

$$a_1=1^2-1+2=2$$

よって $n=1$ でも成り立つ

よって $a_n=n^2-n+2 \quad (n\geqq1)$

$\therefore\ n^2-n+2$ 個