

⑧ P108

すべての自然数 n について、 $7^n - 1$ は 6 の倍数である。…… (A)

[証明]

[1] $n=1$ のとき

$$7^n - 1 = 7^1 - 1 = 6$$

よって $n=1$ のとき (A) は成り立つ

[2] $n=k$ のとき (A) は成り立つと仮定すると

$7^k - 1$ は 6 の倍数であるので

$$7^k - 1 = 6m \quad (m \text{ は整数}) \quad \dots \textcircled{1}$$

 $n=k+1$ のとき

$$7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①より

$$7^k - 1 = 6m$$

$$7^k = 6m + 1$$

②に代入して

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 1 &= 7 \cdot 7^k - 1 \\ &= 7(6m + 1) - 1 \\ &= 7 \cdot 6m + 7 - 1 \\ &= 7 \cdot 6m + 6 \\ &= 6(7m + 1) \end{aligned}$$

$(7m+1)$ は整数なので、 $6(7m+1)$ は 6 の倍数である。

よって $n=k+1$ のとき (A) は成り立つ

[1][2]より

すべての自然数 n について、

$7^n - 1$ は 6 の倍数である。