15 P164

$\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$

$2^n < 3^{20} < 2^{n+1}$

各辺を常用対数にすると

$\log_{10}2^n < \log_{10}3^{20} < \log_{10}2^{n+1}$

$n\log_{10}2 < 20\log_{10}3 < (n+1)\log_{10}2$

$n \times 0.3010 < 20 \times 0.4771 < (n+1) \times 0.3010$

$0.3010n < 9.542 < 0.3010(n+1)$

$\log_a x^n = n\log_a x$

連立不等にすると

$$\begin{cases} 0.3010n < 9.542 & \cdots ① \\ 9.542 < 0.3010(n+1) & \cdots ② \end{cases}$$

$\begin{cases} a<b \\ b<c \end{cases} \Leftrightarrow a<b<c$

①より

$0.3010n < 9.542$

$n < \dfrac{9.542}{0.3010}$

$n < 31.7\cdots$

②より

$9.542 < 0.3010(n+1)$

$9.542 < 0.3010n + 0.3010$

$9.542 - 0.3010 < 0.3010n$

$9.241 < 0.3010n$

$\dfrac{9.241}{0.3010} < n$

$30.7\cdots < n$

よって

$30.7\cdots < n < 31.7\cdots$

よって

$n = 31$