14　P229

$$\left\{ \int_0^1 f(x)\,dx \right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$$

[証明]

f(x) は 1次関数 より

$f(x) = ax + b$　（a, b は実数, $a \neq 0$）とおく

a=0 のとき
f(x) は 1次関数
にならないので

(右辺) − (左辺)

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx - \left\{ \int_0^1 f(x)\,dx \right\}^2 \\
&= \int_0^1 (ax+b)^2 dx - \left\{ \int_0^1 (ax+b)\,dx \right\}^2 \\
&= \int_0^1 (a^2x^2 + 2abx + b^2)\,dx - \left\{ \left[ \frac{1}{2}ax^2 + bx \right]_0^1 \right\}^2 \\
&= \left[ \frac{1}{3}a^2x^3 + abx^2 + b^2x \right]_0^1 - \left\{ \left( \frac{1}{2}a + b \right) - (0+0) \right\}^2 \\
&= \left( \frac{1}{3}a^2 + ab + b^2 \right) - (0+0+0) + \left( \frac{1}{2}a + b \right)^2 \\
&= \frac{1}{3}a^2 + ab + b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ab + b^2 \\
&= \frac{7}{12}a^2 + 2ab + 2b^2 \\
&= \frac{1}{12}(7a^2 + 24ab + 24b^2) \\
&= \frac{7}{12}\left( a^2 + \frac{24}{7}ab + \frac{24}{7}b^2 \right) \\
&= \frac{7}{12}\left\{ \left(a + \frac{12}{7}b\right)^2 - \left(\frac{12}{7}b\right)^2 + \frac{24}{7}b^2 \right\} \\
&= \frac{7}{12}\left\{ \left(a + \frac{12}{7}b\right)^2 - \frac{144}{49}b^2 + \frac{24}{7}b^2 \right\} \\
&= \frac{7}{12}\left\{ \left(a + \frac{12}{7}b\right)^2 - \frac{144}{49}b^2 + \frac{168}{49}b^2 \right\} \\
&= \frac{7}{12}\left\{ \left(a + \frac{12}{7}b\right)^2 + \frac{24}{49}b^2 \right\} \\
&= \frac{7}{12}\left(a + \frac{12}{7}b\right)^2 + \frac{2}{7}b^2 > 0
\end{aligned}$$

公式
$x^2 + y^2 \geqq 0$
等号成立（$x^2+y^2=0$ となるとき）は、
$x = y = 0$ のとき

$\frac{7}{12}\left(a+\frac{12}{7}b\right)^2 + \frac{2}{7}b^2 \geqq 0$ と
なるかどうかは、0 となるときは
$a + \frac{12}{7}b = 0$ かつ $\frac{2}{7}b = 0$
よって $b=0$, $a=0$ のとき。
いまは、$a \neq 0$ なので
$\frac{7}{12}\left(a+\frac{12}{7}b\right)^2 + \frac{2}{7}b^2$ は 0 に
ならない。
よって $\frac{7}{12}\left(a+\frac{12}{7}b\right)^2 + \frac{2}{7}b^2 > 0$

よって

(右辺) − (左辺) > 0

よって

$$\therefore \left\{ \int_0^1 f(x)\,dx \right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$$