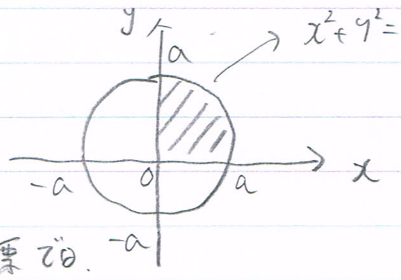
問1　P77

(1) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq a^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$
の領域を図示して、極座標に変換すると



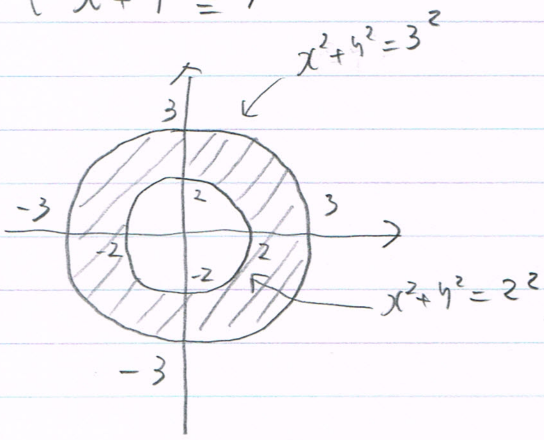
極座標では、
$D=\{(r,\theta)\mid 0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\}$

よって

$$\iint_D x\,dxdy=\iint_D r\cos\theta\cdot r\,drd\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r^2\cos\theta\,drd\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\int_0^{a} r^2\,dr\cdot d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\frac{1}{3}a^3\,d\theta$$
$$=\frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{3}a^3\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}a^3(1-0)$$
$$=\frac{1}{3}a^3$$

(2) $D=\{(x,y)\mid 4\leqq x^2+y^2\leqq 9\}$ より
領域を図示して、極座標に変換すると

$4\leqq x^2+y^2\leqq 9$ は連立方程式に
かき直せるので
$$\begin{cases}x^2+y^2\geqq 4\\ \text{かつ}\\ x^2+y^2\leqq 9\end{cases}$$



よって極座標では
$D=\{(r,\theta)\mid 2\leqq r\leqq 3,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\}$

公式

直交座標 → 極座標へ変換すると

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,drd\theta$$

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$
$$=\iint_D\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\;r\,drd\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_2^3\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\;r\,drd\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_2^3\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\;r\,drd\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_2^3\sqrt{r^2}\;r\,drd\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_2^3|r|\,r\,drd\theta$$

$r\geqq 0$ より $|r|=r$

$$=\int_0^{2\pi}\int_2^3 r^2\,drd\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_2^3 d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(9-\frac{8}{3}\right)d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{19}{3}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{19}{3}\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{38}{3}\pi$$

公式

$$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases}\alpha\leqq\beta\\ \text{かつ}\\ \beta\leqq\gamma\end{cases}$$