問14　P56

$a>0$ のとき

$\sqrt{1+a} < 1+\frac{a}{2}$

[証明]

$(右辺)^2-(左辺)^2 = \left(1+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2$

$= 1+a+\frac{a^2}{4} - (1+a)$

$= \frac{a^2}{4} > 0 \leftarrow \boxed{a>0より}$

よって

$\left(\sqrt{1+a}\right)^2 < \left(1+\frac{a}{2}\right)^2$ ---①

また

$\sqrt{1+a} > 0$, $1+\frac{a}{2} > 0$ であるから

①式は

$\sqrt{1+a} < 1+\frac{a}{2}$ も成り立つ

$\therefore \sqrt{1+a} < 1+\frac{a}{2}$ は成り立つ

公式

$a>0$, $b>0$ のとき

$a > b \iff a^2 > b^2$

公式

$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ のとき

$a \geqq b \iff a^2 \geqq b^2$

問15　P56

$|a|+|b| \geqq |a-b|$

[証明]

$(左辺)^2-(右辺)^2 = (|a|+|b|)^2 - (|a-b|)^2$

$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - |a-b|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a-b)^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2-2ab+b^2)$

$= 2|ab| + 2ab$

$= 2(|ab| + ab)$

公式

$|a|^2 = a^2$, $|a+b|^2 = (a+b)^2$

$|a||b| = |ab|$

ここで

$-|ab| \leqq ab \leqq |ab|$ より

$-|ab| \leqq ab$

$0 \leqq ab + |ab|$

公式

$-|a| \leqq a \leqq |a|$

よって

$(左辺)^2-(右辺)^2 = 2(|ab|+ab) \geqq 0$

よって

$(|a|+|b|)^2 \geqq (|a-b|)^2$

$|a|+|b| \geqq 0$, $|a-b| \geqq 0$ より

$\therefore |a|+|b| \geqq |a-b|$ は成り立つ

等号成立は　$|ab| + ab = 0$ のとき.