

例6 p99

(1)  $\frac{dx}{dt} = \frac{t+1}{2x}$

変数分離形 である

$\frac{dx}{dt} = \frac{t+1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

$x \frac{dx}{dt} = \frac{t+1}{2}$

両辺を t で積分すると

$\int x \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int \frac{t+1}{2} dt$

$\int x dx = \frac{1}{2} \int (t+1) dt$

$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}t^2 + t) + C$

$x^2 = \frac{1}{2}t^2 + t + 2C$

2C = C とし、(2C を C とし定数なので)

$x^2 = \frac{1}{2}t^2 + t + C$

条件 t=2, x=1 を代入して

$1 = 2 + 2 + C$

$C = -3$

よって

$x^2 = \frac{1}{2}t^2 + t - 3$

(2)  $\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{t^2+1}$

変数分離形 である

$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{t^2+1} \cdot x$

$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{t}{t^2+1}$

両辺を t で積分すると

$\int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{t}{t^2+1} dt$

$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{t}{t^2+1} dt$

$= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt$

$\log|x| = \frac{1}{2} \log|t^2+1| + C$

$|x|^2 = x^2$

$t^2+1 > 0$  より

$|t^2+1| = t^2+1$

$\log|x| = \frac{1}{2} \log|t^2+1| + C$

$2 \log|x| = \log|t^2+1| + 2C$

$\log|x|^2 = \log|t^2+1| + C$

2C = C とし

$\log|x|^2 - \log|t^2+1| = C$

$\log x^2 - \log(t^2+1) = C$

$\log \frac{x^2}{t^2+1} = C$

$\frac{x^2}{t^2+1} = e^C$

$e^C = C$  とし

$\frac{x^2}{t^2+1} = C$

t=0, x=2 を代入して

$4 = C$

$\therefore \frac{x^2}{t^2+1} = 4 \rightarrow x^2 = 4(t^2+1)$

公式

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$