問6　P99

(1) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t+1}{2x}$

変数分離形である

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t+1}{2} \cdot \dfrac{1}{x}$

$x\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t+1}{2}$

両辺を t で積分して

$\int x \dfrac{dx}{dt} \cdot dt = \int \dfrac{t+1}{2} dt$

$\int x\, dx = \dfrac{1}{2}\int (t+1)\, dt$

$\dfrac{1}{2}x^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}t^2 + t\right) + C$

$x^2 = \dfrac{1}{2}t^2 + t + 2C$

$2C = C$ として　（2C でも C でも定数なので）

$x^2 = \dfrac{1}{2}t^2 + t + C$

条件 $t=2$, $x=1$ を代入して

$1 = 2 + 2 + C$

$C = -3$

よって

$x^2 = \dfrac{1}{2}t^2 + t - 3$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{tx}{t^2+1}$

変数分離形である

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{t^2+1} \cdot x$

$\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{t^2+1}$

両辺を t で積分して

$\int \dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt} dt = \int \dfrac{t}{t^2+1} dt$

$\int \dfrac{1}{x} dx = \int \dfrac{t}{t^2+1} dt$

$= \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2t}{t^2+1} dt$

$\log|x| = \dfrac{1}{2}\log|t^2+1| + C$

公式

$\boxed{\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C}$

$\log|x| = \dfrac{1}{2}\log|t^2+1| + C$

$2\log|x| = \log|t^2+1| + 2C$

$\log|x|^2 = \log|t^2+1| + C$　　$\boxed{2C = C \text{ として}}$

$\log|x|^2 - \log|t^2+1| = C$

$\boxed{|x|^2 = x^2}$

$\boxed{t^2+1>0 \text{ より } |t^2+1| = t^2+1}$

$\log x^2 - \log(t^2+1) = C$

$\log \dfrac{x^2}{t^2+1} = C$

$\dfrac{x^2}{t^2+1} = e^C$　　$\boxed{e^C = C \text{ として}}$

$\dfrac{x^2}{t^2+1} = C$

$t=0$, $x=2$ を代入して

$4 = C$

$\therefore \dfrac{x^2}{t^2+1} = 4 \longrightarrow x^2 = 4(t^2+1)$