11　P 198

$f(x) = x^3 - ax^2 + (1-2a)x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + (1-2a)$

$f(x)$ が極値をもつとき、すなわち

$f'(x)$ の符号が変わる点があるということは、

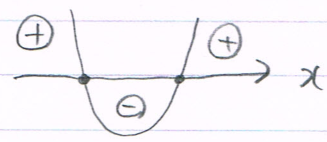
$f'(x)$ のグラフが x 軸と2点で交わることであるので

$f'(x)$ の判別式 D が $D>0$ となるとき．

例

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + (1-2a)$



$f'(x)$ は x 軸と2点で交わる

$$D = (-2a)^2 - 4\cdot3\cdot(1-2a)$$
$$= 4a^2 - 12(1-2a)$$
$$= 4a^2 + 24a - 12$$

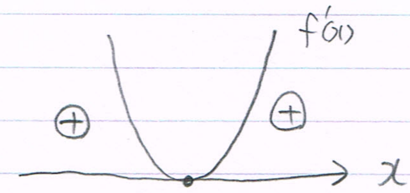
$D>0$ より

$$4a^2 + 24a - 12 > 0$$
$$a^2 + 6a - 3 > 0 \quad \cdots ①$$

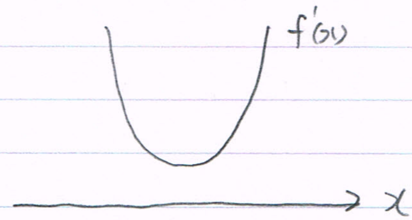
$a^2+6a-3=0$ として、a の解を求めると

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot1\cdot(-3)}}{2\times1}$$
$$= \frac{-6 \pm \sqrt{48}}{2}$$
$$= \frac{-6 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$
$$a = -3 \pm 2\sqrt{3}$$

それ以外のときは



$f'(x) \geqq 0$



$f'(x) > 0$

で、$f'(x)$ の符号は変わらない

よって ① の式の左辺を因数分解して

$$\{a - (-3-2\sqrt{3})\}\{a - (-3+2\sqrt{3})\} > 0$$

よって

$$a < -3-2\sqrt{3}, \quad -3+2\sqrt{3} < a$$

アイウ

公式

$\alpha < \beta$ のとき

① $(x-\alpha)(x-\beta) > 0 \rightarrow x<\alpha,\ \beta<x$

② $(x-\alpha)(x-\beta) < 0 \rightarrow \alpha<x<\beta$

$g(x) = x^3 - 2x^2 + 3ax + 1$

$g'(x) = 3x^2 - 4x + 3a$

$g(x)$ が極値をもたないときは、$g'(x)$ の符号が変わらないとき、つまり $g'(x)$ のグラフが x 軸と2点で交わらないとき、つまり x 軸と接するか、または x 軸と交わらないとき．

つまり、$g'(x)$ の判別式 D が $D \leqq 0$ のとき．

$$D = (-4)^2 - 4\cdot3\cdot3a$$
$$= 16 - 36a$$

$D \leqq 0$ のとき．

$$16 - 36a \leqq 0$$
$$\therefore a \geqq \frac{4}{9}$$